

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 81/75

NOVEMBER

G.M. WILLEMS

KWALITATIEVE ANALYSE VAN STATIONAIRE OPLOSSINGEN
VAN STELSLS DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
—AMSTERDAM—

1975 D 1

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 34CXX, 34D20, 34A10

KWALITATIEVE ANALYSE VAN STATIONAIRE OPLOSSINGEN VAN STELSELS
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

door

G.M. Willems

SAMENVATTING

Er wordt een overzicht gegeven van in de literatuur bestaande methodes om stelsels differentiaalvergelijkingen, zoals deze voorkomen bij chemische reacties, te analyseren. Naast het introduceren en bespreken van de hulpmiddelen uit de niet-lineaire analyse en de theorie van de differentiaalvergelijkingen wordt aandacht besteed aan een probleem betreffende moleculaire gewichtsverdelingen.

INHOUD

Blz.

Voorwoord	1
1. Inleiding en probleemstelling	2
2. Speciale eigenschappen van stelsels differentiaalvergelijkingen in verband met de chemische kinetiek.	4
3. Definitie van de graad van een afbeelding	5
4. Existentie van stationaire toestanden	9
5. Stabiliteit van stationaire toestanden.	17
6. Parameter-afhankelijke systemen	19
7. Locale analyse van stationaire toestanden en bifurcatie	20
8. Een "limit cycle" splitst zich af van de "triviale" stationaire toestand.	30
9. Een voorbeeld in verband met moleculaire gewichtsverdelingen.	34
10. Literatuur.	38

VOORWOORD

Dit rapport is een verslag van een serie bijeenkomsten, waarop een schets gegeven is van in de literatuur bestaande methodes om het kwalitatieve gedrag van niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen te analyseren. Vooral die differentiaalvergelijkingen worden behandeld die onder meer voorkomen bij het beschrijven van chemische reacties. Er wordt veel aandacht besteed aan de stationaire toestanden en aan de stabiliteit hiervan. Het bestaan van de stationaire toestanden kan aangetoond worden met het hier behandelde begrip "graad van een afbeelding" en met het begrip "index" kan iets gezegd worden over de stabiliteit. Bifurcatie van oplossingen en het afsplitsen van een "limit-cycle" komen eveneens aan de orde en het rapport wordt afgesloten met een voorbeeld in verband met moleculaire gewichtsverdelingen.

Veelal worden de stellingen en bewijzen globaal aangegeven. Er is niet gestreefd naar volledigheid in dit opzicht. Voor een grondiger bestudering wordt verwezen naar de literatuur.

1. INLEIDING EN PROBLEEMSTELLING

In het vervolg zullen twee typen van systemen van gewone differentiaalvergelijkingen, ontleend aan de theorie van chemische reacties, nader bestudeerd worden:

A. GESLOTEN SYSTEMEN

Veronderstel dat in een vat de stoffen X_i , $i = 1, \dots, n$, opgesloten zitten, zodanig dat geen stof met de omgeving uitgewisseld wordt. Veronderstel bovendien, dat de stoffen X_i in elkaar omgezet kunnen worden middels de chemische reacties R_k , $k = 1, \dots, m$, waarvan de stoichiometrie wordt gegeven door de stoichiometrische coëfficiënten $v_{ik}^{(*)}$, $i = 1, \dots, n$.

Dan voldoen de concentraties x_i van de stoffen X_i aan het stelsel (gewone) differentiaalvergelijkingen

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} x_i = \sum_{k=1}^m A_k(x_1, \dots, x_n) v_{ik} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n;$$

hierbij is

$$A_k(x_1, \dots, x_n)$$

de snelheid waarmee de k -de reactie R_k verloopt. Veelal zullen we de vectornotatie

$$(1.1') \quad \frac{d}{dt} x = f(x),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

in plaats van (1.1) gebruiken.

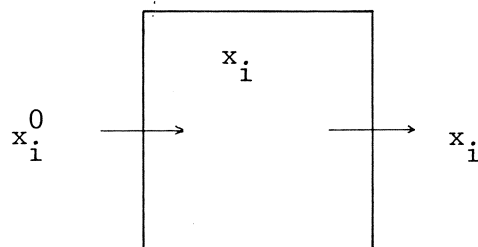
Deze systemen worden gewoonlijk aangeduid met de naam *gesloten systemen*.

(*) Indien de reactie R_k gerepresenteerd wordt door $\sum_{i=0}^n \alpha_i X_i \rightleftharpoons \beta_i X_i$, dan wordt v_{ik} gedefinieerd door $v_{ik} = \beta_i - \alpha_i$.

B. IDEALE MENGERS MET CONTINUE VOEDING

Het tweede type systemen dat we beschouwen is identiek aan het onder 1.A genoemde, behalve dat deze systemen stof met de omgeving uitwisselen op de volgende manier:

per tijdseenheid stroomt een fractie θ van het volume van het vat in respectievelijk uit ($\frac{1}{\theta}$ is dus de verblijftijd in de menger); de concentratie van de stof X_i in de inflow is gelijk aan x_i^0 , de concentratie van X_i in de outflow is gelijk aan x_i , $i = 1, \dots, n$.



Figuur 1.1.

De concentraties x_i van de stoffen X_i voldoen in dit geval aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} x_i = \theta(x_i^0 - x_i) + f_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(x_1, \dots, x_n).$$

In vectornotatie wordt (1.2)

$$(1.2') \quad \frac{d}{dt} x = \theta(x_0 - x) + f(x) = g(x).$$

Deze systemen worden gewoonlijk aangeduid met de naam *stirred tank reactor*.

Het is de opzet om in het volgende een aantal (in de literatuur bekende) technieken voor het verkrijgen van kwalitatieve informatie betreffende genoemde systemen te behandelen. Speciaal zullen aan de orde komen uitspraken over het *bestaan* van *stationaire punten* en hun *stabiliteitseigenschappen*.

De stationaire punten van (1.1) respectievelijk (1.2) zijn oplossingen van de vergelijking

$$(1.3) \quad f(x) = 0,$$

respectievelijk

$$(1.4) \quad g(x) = 0.$$

Met behulp van speciale eigenschappen van de functies f en g , die een direct gevolg zijn van het feit dat (1.1) respectievelijk (1.2) een chemisch systeem beschrijven, en met behulp van de theorie van de graad van een afbeelding zullen een aantal stellingen afgeleid worden. Hier is [1] een geschikte literatuurverwijzing.

Voorts zal het geval bekeken worden, dat de functies f en g niet alleen van de concentraties x_i afhangen, maar bovendien van een (extern regelbare) parameter λ . Hierbij zullen we vooral aandacht geven aan de parameterafhankelijkheid van de stationaire punten en hun stabiliteitskarakter. Deze resultaten zijn minder eenvoudig in de literatuur terug te vinden; het merendeel van de technieken is ontleend aan de publicaties [2], [3], [4] en [5].

2. SPECIALE EIGENSCHAPPEN VAN STELSELS DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN IN VERBAND MET DE CHEMISCHE KINETIEK

Twee algemeen geldige fysische eigenschappen van de systemen, waarvan de vergelijkingen (1.1) en (1.2) modellen zijn, zullen in deze paragraaf "vertaald" worden in eigenschappen van de functies f en g . Dit zal onder andere resulteren in apriori schattingen voor oplossingen van de differentiaalvergelijkingen (1.1) en (1.2).

De eerste fysische eigenschap kan geformuleerd worden als: "De elementaire bouwstenen van de stoffen X_i (atomen of, bijvoorbeeld bij polymerisatie-reacties, kleine moleculen) blijven behouden bij chemische reacties".

Stel dat de stoffen X_i , $i = 1, \dots, n$ opgebouwd zijn uit de bouwstenen A_j , $j = 1, \dots, \ell$, zodat elk molecuul X_i het aantal $m_{ij} (\geq 0)$ eenheden A_j bevat. Dan levert deze *behoudswet* ℓ (niet noodzakelijk onafhankelijke) *relaties* tussen de rijen van de stoichiometrische matrix v_{ik} op, namelijk behoud van A_j in de reactie R_k betekent

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^n v_{ik} m_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, \ell, \quad k = 1, \dots, m.$$

Een direct gevolg hiervan is (zie (1.1))

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i = 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

De tweede fysische eigenschap, die voor alle beschouwde systemen moet gelden, is dat *concentraties niet-negatief* moeten zijn. Dit impliceert dat de rechterleden van (1.1) en (1.2) zodanig moeten zijn gekozen, dat op de rand van $\mathbb{R}_n^+$ ($\mathbb{R}_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$) geldt

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (f, n) &= \sum_{i=1}^n f_i n_i \geq 0, \\ (g, n) &= \sum_{i=1}^n g_i n_i \geq 0. \end{aligned}$$

Hierbij is $n = (n_1, \dots, n_n)$ de naar binnen gerichte normaal op de rand van $\mathbb{R}_n^+$.

3. DEFINITIE VAN DE GRAAD VAN EEN AFBEELDING

Zij Ω een gebied in de $\mathbb{R}^n$, p een punt in de $\mathbb{R}^n$ en h een continue functie van $\bar{\Omega}$ naar de $\mathbb{R}^n$ zo, dat

$$(3.1) \quad p \notin h(\partial\Omega), \quad (\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega).$$

Aan dit drietal wordt een geheel getal

$$\text{degr}(p, h, \Omega),$$

de graad van h ten opzichte van Ω en p , op de volgende manier toegevoegd. Indien voor alle $z \in \Omega$ met de eigenschap

$$h(z) = p \quad (\text{notatie: } z \in h^{-1}(p))$$

geldt

$$(3.2) \quad \det\left(\frac{d}{dz} h(z)\right) = \det\left(\frac{d}{dz_j} h_i(z_1, \dots, z_n)\right) \neq 0,$$

dan wordt de graad gedefinieerd door de formule

$$(3.3) \quad \text{degr}(p, h, \Omega) = \sum_{z \in h^{-1}(p)} \text{sign}\left(\det\left(\frac{d}{dz} h(z)\right)\right).$$

Op het eerste gezicht is dit een nogal gecompliceerde definitie; men zou liever zien

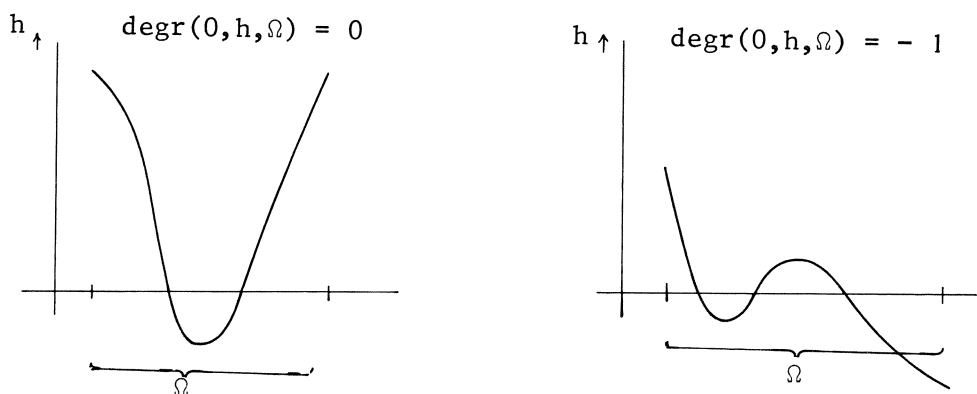
$$\text{degr}(p, h, \Omega) = \sum_{z \in h^{-1}(p)} 1.$$

Het blijkt echter dat het zo gedefinieerde getal bij kleine veranderingen van de functie h ook verandert, hetgeen niet het geval is bij de definitie (3.3) (zie homotopie eigenschap (3.9), eigenschap (3.5) en ook voorbeeld 3.1).

Hoewel uit de definitie blijkt dat de graad de p -punten niet "echt telt", kan men de graad wel gebruiken om een schatting te krijgen van het aantal p -punten:

- a) $\text{degr}(p, h, \Omega) = 0$ zegt niets over het aantal p -punten,
- b) $|\text{degr}(p, h, \Omega)| = m$ zegt er zijn minstens m p -punten.

VOORBEELD 3.1.



Figuur 3.1.

VOORBEELD 3.2. Laat Ω de oorsprong bevatten en laat de functie h gelijk zijn aan

$$h(z) = Az,$$

waarbij A een niet-singuliere lineaire afbeelding is. Dan geldt

$$\text{degr}(0, h, \Omega) = \text{sign}(\det A).$$

Aangetoond kan worden dat men deze definitie van de graad kan uitbreiden tot alle continue functies h op $\bar{\Omega}$, waarvoor $p \notin h(\partial\Omega)$, zodanig, dat de volgende eigenschappen blijven gelden:

$$(3.4) \quad \text{degr}(p, h, \Omega)$$

is een geheel getal.

$$(3.5) \quad \text{degr}(p, h, \Omega)$$

hangt continu af van h en p ; dat wil zeggen dat er een $\delta > 0$ bestaat zo, dat

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) - h(x)| < \delta$$

en

$$|p - q| < \delta,$$

impliceert dat

$$\text{degr}(q, f, \Omega) = \text{degr}(p, h, \Omega).$$

$$(3.6) \quad \text{degr}(p, h, \Omega) \neq 0$$

impliceert dat er tenminste één punt $z \in \Omega$ bestaat met $h(z) = p$. Indien

$$(3.7) \quad \Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad \Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset, \quad p \notin \partial\Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

dan geldt

$$\text{degr}(p, h, \Omega) = \sum_i \text{degr}(p, h, \Omega_i).$$

Indien

$$(3.8) \quad K \subset \bar{\Omega}, \quad K \text{ gesloten en } p \notin h(K),$$

dan geldt

$$\text{degr}(p, h, \Omega) = \text{degr}(p, h, \Omega - K).$$

Indien er een continue afbeelding

$$(3.9) \quad H: \bar{\Omega} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

bestaat, met de eigenschappen

$$H(\cdot, 0) = g(\cdot), \quad H(\cdot, 1) = h(\cdot), \quad p \notin H(\partial\Omega, [0,1])$$

dan geldt

$$\text{degr}(p, g, \Omega) = \text{degr}(p, h, \Omega).$$

De afbeeldingen g en h worden in dat geval *homotoop* genoemd; notatie $h \sim g$.

VOORBEELD 3.3. Als eenvoudige toepassing van het vorige bewijzen we nu *Brouwer's Fixed Point Theorem*:

STELLING. Zij f een continue afbeelding van de eenheidsbol B_n (in de $\mathbb{R}^n$) in de eenheidsbol B_n . Dan heeft f een vast punt x ($x = f(x)$).

BEWIJS. Beschouw $H(x, t) = x - tf(x)$. Voor $x \in \partial B_n$ geldt $x - tf(x) \neq 0$, $0 \leq t < 1$. Indien voor zekere $x \in \partial B_n$ geldt $x - f(x) = 0$, dan valt er niets meer te bewijzen. Wanneer dit laatste niet voorkomt, dan is H een homotopie als in eigenschap (3.9). Er geldt $H(\cdot, 0) = I$ ($Ix = x$) en $H(\cdot, 1) = I - f$. Volgens (3.3) is $\text{degr}(0, I, B_n) = 1$; dus volgens (3.9) geldt $\text{degr}(0, I - f, B_n) = 1$, hetgeen gecombineerd met (3.6) het bewijs van de stelling oplevert. $\square$

VOORBEELD 3.4. Zij $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$, $h(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 x_2)$. Dan is $\text{degr}(0, h, \Omega) = 2$. Dit volgt uit het feit dat h homotoop is met (voor ε voldoende klein) $g(x_1, x_2) = ((x_1 - \varepsilon)(x_1 + \varepsilon), x_1 x_2)$. Volgens (3.3) is $\text{degr}(0, g, \Omega) = 2$.

VOORBEELD 3.5. Zij $\Omega = \{x_1 \mid -1 < x_1 < 1\}$, $h_1(x_1) = x_1^2$, $h_2(x_1) = x_1^3$. Dan geldt $\text{degr}(0, h_1, \Omega) = 0$, $\text{degr}(0, h_2, \Omega) = 1$. Men gaat immers gemakkelijk na dat h_1 homotoop is met $g_1(x) = 1$, en dat h_2 homotoop is met $g_2(x) = x$.

VOORBEELD 3.6. Zij Ω het interval $[a, b]$. Indien $f(a)h(a) > 0$ en $f(b)h(b) > 0$ dan geldt $f \sim h$ en dus $\text{degr}(0, f, \Omega) = \text{degr}(0, h, \Omega)$.

VOORBEELD 3.7. Zij $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$. Indien voor de afbeeldingen f en h van Ω naar $\mathbb{R}^n$ geldt

$$\text{sign}(f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \text{sign}(h(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) \neq 0$$

dan geldt $f \sim h$.

Tenslotte wordt nog de fundamentele stelling van Hopf (zie [6]) vermeld. Zij $S_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Twee afbeeldingen $f, g: S_n \rightarrow S_n$ worden homotoop genoemd indien er een continue functie $H: S_n \times [0, 1] \rightarrow S_n$ bestaat met de eigenschappen $H(\cdot, 0) = f(\cdot)$, $H(\cdot, 1) = g(\cdot)$. De stelling heeft dan als inhoud dat $f, g: S_n \rightarrow S_n$ dan en slechts dan homotoop zijn als $\text{degr}(0, \tilde{f}, B_{n+1}) = \text{degr}(0, \tilde{g}, B_{n+1})$. Hierbij is f een Tietze uitbreiding van f tot een functie $\tilde{f}: \bar{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}$. (Gezien (3.9) is $\text{degr}(0, f, B_{n+1})$ onafhankelijk van de gekozen uitbreiding.) Een vrijwel onmiddellijk gevolg hiervan is dat afbeeldingen van convexe gebieden in de $\mathbb{R}_n$ op homotopie na gekarakteriseerd worden door de graad van de afbeelding ten opzichte van dat gebied. Dit zou men als volgt kunnen "vertalen":

Indien men twee afbeeldingen die "dicht" bij elkaar liggen dezelfde eigenschappen wil toekennen, dan volgen die eigenschappen uit de graad van de betreffende afbeelding, tenminste zolang men binnen de klasse van alle continue afbeeldingen blijft werken.

Indien men meer eigenschappen van de functie f kent (bijvoorbeeld het gedrag van f op deelgebieden Ω_i van Ω of bijvoorbeeld dat $\frac{d}{dz} f(z)$ positief definitief is in Ω of dat $f(z) = \frac{d}{dz} V(z)$) dan is het mogelijk om scherpere resultaten te bereiken.

4. EXISTENTIE VAN STATIONAIRE TOESTANDEN

A. GESLOTEN SYSTEMEN

Relatie (2.2) gecombineerd met vergelijking (1.1) levert de behoudswetten

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_{ij} x_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell' (*)$$

op. Een direct gevolg hiervan is dat de concentratievector $x = (x_1, \dots, x_n)$ zich blijft bevinden op de lineaire variëteit V , die bepaald wordt door de relaties

$$(4.2) \quad y_j \equiv \sum_{i=1}^n m_{ij} x_i = \sum_{i=1}^n m_{ij} x_i^0 = y_j^0, \quad j = 1, \dots, \ell';$$

hierbij is $x_i^0 = x_i(t_0)$ de begintoestand van het systeem.

Gewoonlijk wordt V een *invariante variëteit* genoemd. Op de variëteit V kan een coördinatensysteem z ingevoerd worden door de relatie

$$(4.3) \quad x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^r v_{ij} z_j, \quad (x_1, \dots, x_n) \in V, \quad i = 1, \dots, n,$$

hierbij is aangenomen, dat de eerste r ($r < n, r \leq m$) kolommen van de stoichiometrische matrix v_{ij} de onafhankelijke zijn.

Na de coördinatentransformatie (4.3) gaat (1.1) over in

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt} z_i = \tilde{f}_i(z_1, \dots, z_r), \quad i = 1, \dots, r.$$

De eis dat de concentraties x_i positief moeten zijn geeft voor $z_1, \dots, z_r$ de relaties

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^r v_{ij} z_j + x_i^0 \geq 0$$

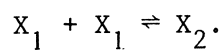
op. Dit betekent dat in de z -ruimte zich alles binnen het simplex S , bepaald door (4.5), afspeelt. De eis (2.3) gaat over in de eis dat op de rand van het simplex S gelden moet

$$(4.6) \quad (\tilde{f}, n) \geq 0,$$

*) We hebben nu de vectoren $m_j = (m_{1j}, \dots, m_{nj})$, $j = 1, \dots, \ell$, aangevuld met m_j , $j = \ell+1, \dots, \ell'$ (mogelijk geldt $\ell' = \ell$) zodanig dat $\{m_j; j = 1, \dots, \ell'\}$ het orthoplement van $\{v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}); j = 1, \dots, m\}$ opspannen.

waarbij n de naar binnen gerichte normaal op ∂S is.

VOORBEELD 4.1. Beschouw de reactie



Er geldt:

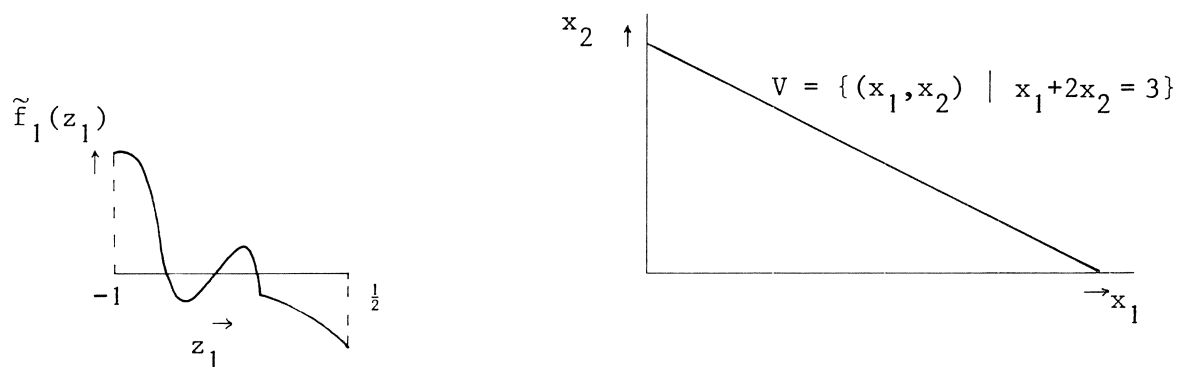
$$v_{11} = -2, \quad v_{21} = 1, \quad m_{11} = 1, \quad m_{21} = 2.$$

Begintoestand: $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1$.

De coördinaat z_1 wordt bepaald door

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2z_1 \\ x_2 &= 1 + z_1. \end{aligned}$$

Het simplex S is nu gelijk aan het interval $\{z_1 \mid -1 \leq z_1 < \frac{1}{2}\}$; zie figuur 4.1.



Figuur 4.1.

VOORBEELD 4.2. Beschouw de reacties

$$x_1 + x_2 \neq x_3$$

$$x_1 + x_1 \neq x_2 .$$

Dan geldt:

$$v_{11} = -1, \quad v_{21} = -1, \quad v_{31} = 1,$$

$$v_{12} = -2, \quad v_{22} = 1, \quad v_{32} = 0,$$

$$m_{11} = 1, \quad m_{21} = 2, \quad m_{31} = 3.$$

Begintoestand: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

De coördinaten (z_1, z_2) worden bepaald door

$$x_1 = 1 - z_1 - 2z_2,$$

$$x_2 = 1 - z_1 + z_2,$$

$$x_3 = 1 + z_1.$$

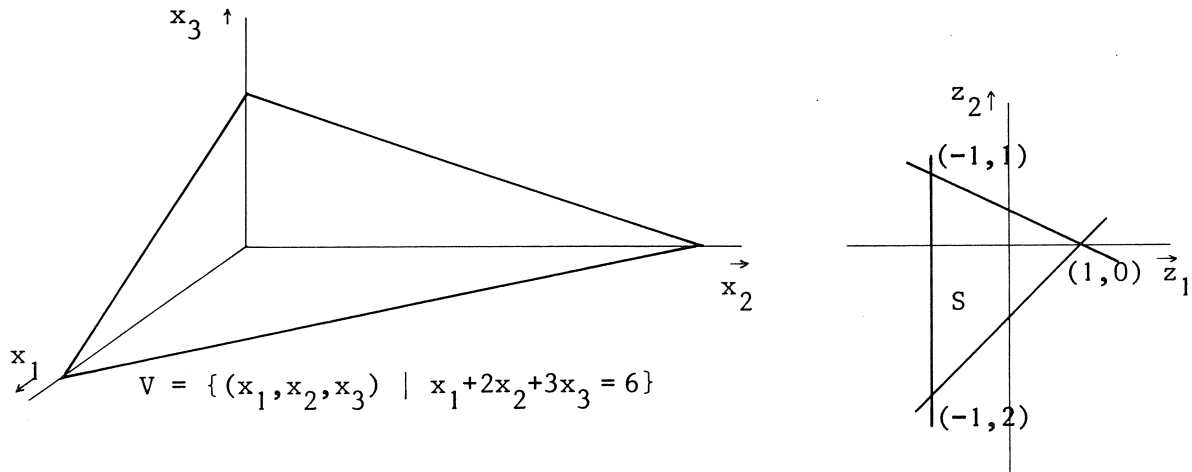
Het simplex S heeft als zijden

$$1 = z_1 + 2z_2.$$

$$1 = z_1 - z_2,$$

$$1 = -z_1.$$

Vergelijk figuur 4.2.



Figuur 4.2.

Stationaire punten van het systeem (1.1) komen overeen met de oplossingen in S van de vergelijking

$$\tilde{f}(z) = 0.$$

Om tot een existentiestelling en andere (kwalitatieve) uitspraken te geraken zullen we eerst de graad van de afbeelding $\tilde{f}$ ten opzicht van S en 0 bepalen.

STELLING. *Er geldt*

$$(4.7) \quad \text{degr}(0, \tilde{f}, S) = (-1)^r.$$

BEWIJS. De afbeelding

$$H(z, t) = -t(z - z_0) + (1-t)\tilde{f}(z),$$

$$H: S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

is een homotopie in de zin van (3.9) tussen de afbeelding $h(z) = -(z-z_0)$ en $\tilde{f}(z)$; tenminste indien z_0 een inwendig punt van S is. Stel namelijk dat voor zekere $t \in (0,1)$ en $z \in \partial S$ zou gelden $H(z,t) = 0$. Dat zou inhouden

$$\frac{t}{1-t} (z-z_0) = \tilde{f}(z), \quad 0 < t < 1,$$

hetgeen in tegenspraak met (4.6) is. Met behulp van eigenschap (3.9) volgt nu

$$\text{degr}(0, h, S) = \text{degr}(0, \tilde{f}, S).$$

De graad van h is, volgens voorbeeld 3.2, $(-1)^r$, waarmee het bewijs voltooid is. $\square$

Een onmiddellijk gevolg van (4.7) is dat (1.1) op elk invariant simplex S tenminste één stationair punt heeft, (volgt onmiddellijk uit eigenschap (3.6)).

B. STIRRED TANK REACTIONS

Relatie (2.2) gecombineerd met (1.2) levert op:

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} y_j = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_{ij} x_i \right) = \theta \sum_{i=1}^n m_{ij} (x_i^0 - x_i) = \theta (y_i^0 - y_i), \quad j = 1, \dots, \ell',$$

(ook hier hebben we de vectoren $m_j = (m_{1j}, \dots, m_{nj})$, $j = 1, \dots, \ell$, aangevuld met m_j , $j = \ell, \dots, \ell'$, zodanig dat het orthoplement van $\{v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj}); j = 1, \dots, m\}$ opgespannen wordt door de vectoren $m_1, \dots, m_{\ell'}$). Door integratie van de differentiaalvergelijking (4.8) vinden we

$$(4.9) \quad y_j(t) = y_j^0 + e^{-\theta(t-t_0)}(y_j(t_0) - y_j^0), \quad j = 1, \dots, \ell'.$$

Dus zullen alle oplossingen van (2.2) zich begeven naar het simplex S bepaald door

$$(4.10) \quad y_j = y_j^0, \quad j = 1, \dots, \ell', \quad \wedge x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Een eerste conclusie is dat de stationaire toestanden zich alle op het simplex S , bepaald door (4.10), bevinden.

Men kan nu twee wegen inslaan. In de eerste plaats is het mogelijk (op dezelfde wijze als in 4.A is gedaan) de functie g op het simplex S te beschouwen, een coördinatentransformatie uit te voeren en de graad van de getransformeerde functie $\tilde{g}$ te bepalen. Men vindt dan

$$\text{degr}(0, \tilde{g}, S) = (-1)^r,$$

waarbij r de dimensie van het simplex S is, met als onmiddellijk gevolg dat (2.2) tenminste één stationair punt op de invariante variëteit S bezit.

Een tweede mogelijkheid gaat als volgt van start. Beschouw het simplex $S' \subset \mathbb{R}_n^+$, begrensd door de rand van $\mathbb{R}_n^+$ en het hypervlak

$$(4.11) \quad y_1 = \sum_{i=1}^n m_{i1} x_i = 2y_1^0.$$

Voor dit simplex bezien we de homotopie

$$H: S' \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_n,$$

$$H(x, t) = -t(x - x_0) + (1-t)g(x), \quad x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Er geldt

$$H(\cdot, 0) = g(\cdot), \quad H(\cdot, 1) = -(x - x_0), \quad 0 \notin H(\partial S', t).$$

Volgens (3.9) is dus $\text{degr}(0, g, S') = \text{degr}(0, -(x - x_0), S') = (-1)^n$ (zie voorbeeld 3.2).

Ook nu kunnen we de conclusie trekken, dat g tenminste één nulpunt heeft in S' . Aangezien we al wisten, dat alle stationaire punten van (2.2) op de invariante variëteit S liggen, volgt ook nu de existentie van een stationair punt op S .

In deze hele paragraaf 4 is stilzwijgend de aanname gemaakt dat f op de rand van $\mathbb{R}_n^+$ ongelijk nul is (fysisch gezien een zeer realistische aan-

name). Dat dit geen essentiële beperking is kan men als volgt inzien.

Allereerst geven we aan hoe een functie f

$$f: S \rightarrow \mathbb{R}_n,$$

S is een n -dimensionaal simplex, met de eigenschap

$$(4.12) \quad (f, n) \geq 0 \quad \text{op } \partial S,$$

uitgebreid kan worden tot een functie $\bar{f}$

$$\bar{f}: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n,$$

zo, dat geldt

$$(4.13) \quad \bar{f}(x) = 0 \Rightarrow x \in S,$$

$$(4.14) \quad \text{degr}(0, \bar{f}, B(x_0, r)) = (-1)^n,$$

- x_0 is een inwendig punt van S ,
- $B(x_0, r)$ is een bol met voldoende grote straal en middelpunt x_0 .

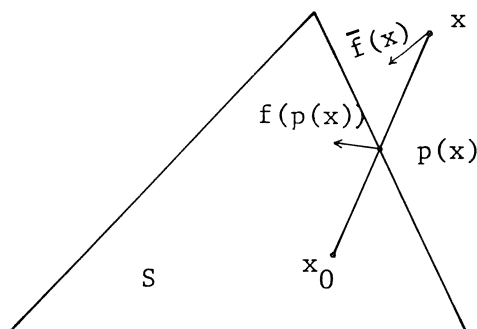
Definieer

$$\bar{f}(x) = f(x), \quad x \in S,$$

$$\bar{f}(x) = f(p(x)) - d(x, S)(x - x_0), \quad x \notin S,$$

waarbij

- $p(x)$ het snijpunt is van ∂S en de verbindinglijn tussen x en x_0 ,
- $d(x, S)$ de afstand tussen x en S is.



Figuur 4.3.

Eigenschap (4.13) volgt uit $(\bar{f}(x), n_{p(x)}) > 0$, waarbij $n_{p(x)}$ de naar binnen-gerichte normaal in $p(x)$ is.

Eigenschap (4.14) is een direct gevolg van de begrensdeheid van f op S ; hieruit volgt namelijk dat voor r voldoende groot $\bar{f}(x) \sim -(x-x_0)$ op de bol $B(x_0, r)$ en dus $\text{degr}(0, \bar{f}, B(x_0, r)) = \text{degr}(0, -(x-x_0), B(x_0, r)) = (-1)^n$.

5. STABILITEIT VAN STATIONAIRE TOESTANDEN

Voor de analyse van de stabiliteit^(*) van een stationaire toestand van de differentiaalvergelijking

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} y_i = f_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

maakt men gewoonlijk gebruik van de stelling van Poincaré-Liapunov.

Zij

$$\frac{d}{dy} f(y_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right) (y_0).$$

Dan geldt:

- Indien alle eigenwaarden μ van de matrix $\frac{d}{dy} f(y_0)$ een negatief reëel deel hebben dan is y_0 stabiel (zelfs asymptotisch stabiel).
- Indien tenminste één van de eigenwaarden μ van de $\frac{d}{dy} f(y_0)$ een positief reëel deel heeft dan is y_0 instabiel.
- Er wordt dus geen uitspraak gedaan in het geval dat één of meer eigenwaarden een reëel deel gelijk aan nul hebben; dit is een essentieel lastiger geval dat nadere analyse vereist.).

Gezien de onderstaande figuren 5.1a,b kunnen we niet verwachten dat de algemene informatie over f en g , die in de vorige paragraaf leidde tot een

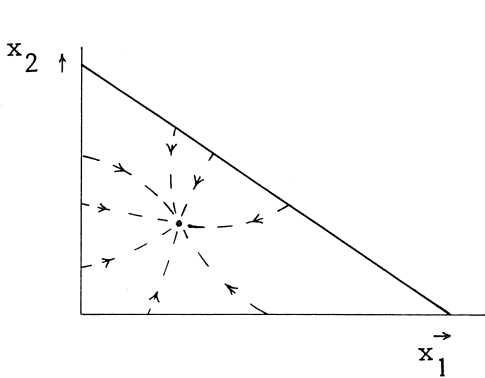
(*) Wij zullen de volgende definitie van stabiliteit gebruiken:

De stationaire toestand y_0 heet *stabiel* indien er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo, dat geldt voor oplossingen y van (5.1)

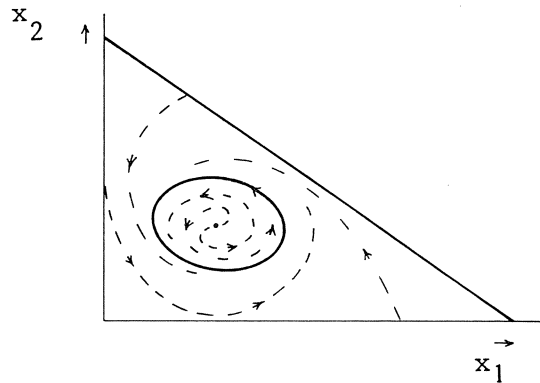
$$(5.2) \quad \|y(t_0) - y_0\| < \delta \Rightarrow \|y(t) - y_0\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Indien bovendien geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_0\| = 0$, dan heet y_0 *asymptotisch stabiel*.

existentie stelling, ook voldoende zou zijn om het bestaan van een stabiel stationair punt aan te tonen.



Figuur 5.1a



Figuur 5.1b

Zowel om de situatie te scheppen dat de stelling van Poincaré-Liapunov toegepast kan worden als om het mogelijk te maken dat de bijdrage aan de graad van elk nulpunt van f (resp. g) afzonderlijk berekend kan worden (zie (3.3)) zullen we van nu af aan in deze paragraaf veronderstellen dat in elk stationair punt x_0 alle eigenwaarden van

$$\frac{d}{dx} f(x_0) \text{ (respectievelijk } \frac{d}{dx} g(x_0))$$

een reëel deel ongelijk aan nul hebben.

In het voorgaande is afgeleid dat ten opzichte van een zeker gebied Ω (het simplex S of S' respectievelijk een bol om een simplex) geldt $\text{degr}(0, f, \Omega) = (-1)^k$ en $\text{degr}(0, g, \Omega) = (-1)^k$, k dimensie Ω . De bijdrage van een stabiel stationair punt (reële deel van alle eigenwaarden kleiner dan nul) is $(-1)^k$. Hieruit kan men concluderen dat indien er m stabiele stationaire punten zijn er minstens $(m-1)$ stationaire punten moeten zijn met index $(-1)^{(k-1)}$ ($\text{index} = \text{sign}(\det \frac{d}{dz} f(z))$ (de stationaire punten zijn in dit geval geïsoleerd, dus eindig in aantal). Deze punten met index $(-1)^{(k-1)}$

zijn instabiel.

Dit (tezamen met de existentie stelling uit 4) is zo ongeveer alles wat men in z'n algemeenheid over de stationaire punten van de systemen (1.1) en (1.2) kan zeggen. Wij verwijzen hierbij nog naar de laatste opmerkingen uit paragraaf 3. Wil men meer uitspraken kunnen doen, dan zal men over meer informatie betreffende het rechterlid moeten beschikken.

6. PARAMETER-AFHANKELIJKE SYSTEMEN

In het vervolg wordt aangenomen, dat de stoichiometrie niet van de parameter λ afhangt; dit is plausibel, aangezien de stoichiometrische coëfficiënten gehele getallen zijn en dus alleen continu van λ af kunnen hangen indien ze constant zijn als functie van λ . Dit nu heeft als onmiddellijk gevolg dat we op elk eindig λ -interval uniform een gebied Ω (S, S' als in paragraaf 4) kunnen aangeven met de eigenschap dat

$$\text{degr}(0, f(\cdot, \lambda), \Omega) = (-1)^k, \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1], \quad k = \text{dimensie van } \Omega.$$

Een analogon van de existentiestelling uit paragraaf 4 is dan de volgende

STELLING. Zij $f: \Omega \times [\lambda_0, \lambda_1]$ zodanig dat

$$\text{degr}(0, f(\cdot, \lambda), \Omega) = c \neq 0, \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1].$$

Dan bestaat er een compacte samenhangende deelverzameling C van $\Omega \times [\lambda_0, \lambda_1]$ met de eigenschappen:

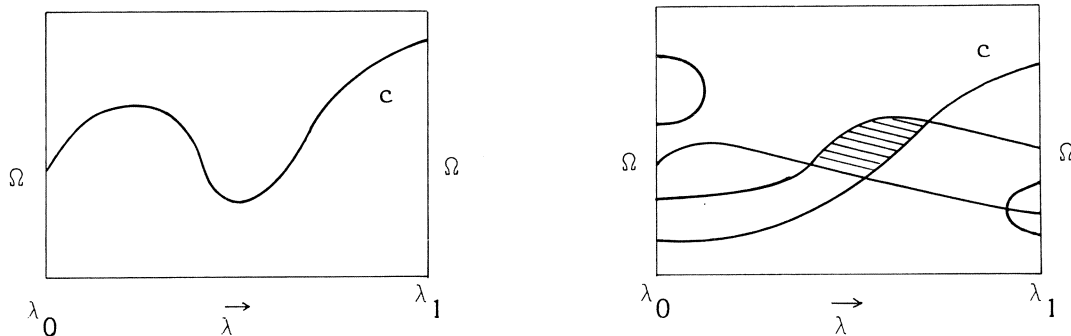
$$(x, \lambda) \in C \Rightarrow f(x, \lambda) = 0, \quad C \cap \{\Omega \times \lambda_0\} \neq \emptyset, \quad C \cap \{\Omega \times \lambda_1\} \neq \emptyset.$$

BEWIJS. Met de methoden uit [4].

OPMERKING. Zoals reeds opgemerkt in de discussie voorafgaande aan de stelling worden de verzamelingen Ω uit het paragraaf 4 bepaald door de stoichiometrie van de chemische reacties. Veronderstellen wij deze constant, dan volgt dat Ω ook niet verandert. Ten opzichte van deze Ω heeft het rechter-

lid f van de vergelijkingen (1.1) respectievelijk (1.2) de graad $\text{degr}(0, f, \Omega) = (-1)^r$, zoals afgeleid in paragraaf 4. Hieruit volgt dat de stelling van toepassing is op alle systemen van (1.1) en (1.2) waar een van de parameters varieert zonder dat de stoichiometrie verandert; bijvoorbeeld veranderingen in θ vallen hieronder.

OPMERKING. De gehele oplossingsverzameling O van $f(\cdot, \cdot) = 0$ in $\Omega \times [\lambda_0, \lambda_1]$ kan uit verscheidene componenten bestaan en (evenals C) tamelijk pathologisch zijn. De voorgaande stelling garandeert slechts het bestaan van een (samenhangende) deelverzameling C van O die $\Omega \times \lambda_0$ "verbindt" met $\Omega \times \lambda_1$.



Figuur 6.1.

7. LOCALE ANALYSE VAN STATIONAIRE TOESTANDEN EN BIFURCATIE

Van nu af aan zal verondersteld worden, dat de functie f "vele" malen continu-differentieerbaar is. De notaties

$$f_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{en} \quad f_\lambda = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \right)$$

en analoog voor hogere afgeleiden, zullen nog al eens gebruikt worden.

We beginnen met een stelling waarvan de inhoud weergegeven zou kunnen worden door: "In niet gedegenereerde gevallen is de oplossingsverzameling

$0 = \{(\lambda, x(\lambda)) \mid f(x(\lambda), \lambda) = 0\}$ lokaal een "nette" één-dimensionale variëteit (zonder dubbelpunten)".

STELLING 7.1. Zij (x_0, λ_0) zodanig, dat $f(x_0, \lambda_0) = 0$ en $\det(f_x(x_0, \lambda_0)) \neq 0$. Dan bestaat er een functie x en getallen $\delta, \epsilon > 0$.

$$x: [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

met de eigenschappen

$$f(x(\lambda), \lambda) = 0, \quad \lambda_0 - \delta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \delta,$$

en

$$(7.1) \quad \{f(y, \lambda) = 0 \wedge \|y - x_0\| < \epsilon \wedge |\lambda - \lambda_0| < \delta\} \Rightarrow y = x(\lambda).$$

BEWIJS. Zij $x = x_0 + \delta x$ en $\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda$. Dan volgt uit $f(x, \lambda) = 0$ dat $f_x(x_0, \lambda_0)\delta x + f_\lambda(x_0, \lambda_0)\delta \lambda + R(\delta x, \delta \lambda) = 0$, met $R(\delta x, \delta \lambda) = O(\|\delta x\|^2 + \delta \lambda^2)$, zodat

$$(7.2) \quad \delta x = f_x^{-1}(-f_\lambda \delta \lambda + R(\delta x, \delta \lambda)).$$

Voor $|\delta \lambda| < \delta$, $\|\delta x\| < \delta$ en δ voldoende klein geldt dat het rechterlid van (7.2) als functie van δ een contractie is. Immers

$$f(\delta x, \delta \lambda) = f_x^{-1}(-f_\lambda(0, 0) + R(\delta x, \delta \lambda))$$

heeft als afgeleide

$$F_x(\delta x, \delta \lambda) = f_x^{-1} R_x(\delta x, \delta \lambda) = O(|\delta \lambda| + \|\delta x\|).$$

De conclusies van de stelling volgen nu onmiddellijk uit het feit dat een contractie afbeelding lokaal een één-éénduidig vast punt heeft. $\square$

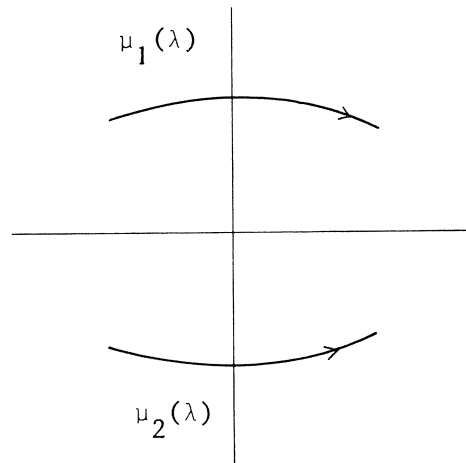
OPMERKING. Dit locale resultaat kan gebruikt worden om tot een maximale uitbreiding van de functie(kiem) x te komen: Indien voor $\lambda_0 + \delta$, $x(\lambda_0 + \delta)$ (respectievelijk $\lambda_0 - \delta$, $x(\lambda_0 - \delta)$) geldt $\det(f_x(x(\lambda_0 \pm \delta), \lambda_0 \pm \delta)) \neq 0$, dan volgt

door toepassing van stelling 7.1 dat het definitiegebied van de functie x uitgebreid kan worden; op deze wijze vindt men uiteindelijk het maximale definitiegebied $D \subset \mathbb{R}$ van x .

Over de *stabiliteitseigenschappen* van $x(\lambda)$ als functie van λ kunnen we, gezien het feit dat voor $\lambda \in D$ geldt

$$\det(f_x(x(\lambda), \lambda)) \neq 0$$

opmerken dat die hoogstens kunnen veranderen doordat een tweetal complex geconjugeerde eigenwaarden $\mu_1(\lambda)$ en $\mu_2(\lambda) = \bar{\mu}_1(\lambda)$ van $f_x(x(\lambda), \lambda)$ voor variërende λ de imaginaire as passeren (maar niet door $\mu = 0$). In dat geval zal er in de buurt van $x(\lambda)$ veelal een limit cycle ontstaan (zie paragraaf 8). (Tenslotte kan nog van belang zijn, dat deze verandering van de stabiliteits-eigenschappen de index (= $\text{sign}(\det f_x)$) van $x(\lambda)$ onveranderd laat).



Figuur 7.1.

Voor het numeriek berekenen van $x(\lambda)$ is de relatie

$$\frac{d}{d\lambda} f(x(\lambda), \lambda) = 0 = f_x \frac{d}{d\lambda} x(\lambda) + f_\lambda = 0$$

waaruit de differentiaalvergelijking

$$(7.3) \quad \frac{d}{d\lambda} x = -f_x^{-1} f_\lambda$$

volgt, van belang.

We spreken van het gedegeneerde geval indien x_0, λ_0 zodanig zijn, dat $f(x_0, \lambda_0) = 0$ en $\det(f_x(x_0, \lambda_0)) = 0$. Deze situatie is aanzienlijk

lastiger te analyseren dan de voorafgaande. Hieronder volgt een aanzet tot een analyse ervan (al spoedig zullen wij ons hierbij beperken tot de situatie dat $f_x(x_0, \lambda_0)$ één enkelvoudige eigenwaarde nul heeft, en zelfs dit geval kan niet uitputtend behandeld worden).

De relatie $\det(f_x(x_0, \lambda_0)) = 0$ impliceert dat op een geschikte basis $(e_1, \dots, e_k)$ de matrix $f_x(x_0, \lambda_0)$ de gedaante

$$(7.4) \quad \left(\begin{array}{cccccccccc} & \overbrace{}^{k_0} & & & & & & & & \\ \left. \begin{array}{c} k_0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & & & & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & J_1 & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & & & \end{array} \right) \end{array} \right)$$

heeft, waarbij de (vierkante) matrix J_1 niet singulier is.

Zij $P: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ de projectie gedefinieerd door

$$P\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i e_i,$$

dan worden P en $I - P$ ten opzichte van de basis $\{e_i\}$ gerepresenteerd door de matrices

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{k_0} & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset \end{array} \right) \text{ en } \left(\begin{array}{c|c} \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & I_{k-k_0} \end{array} \right).$$

De vergelijking $f(x, \lambda) = 0$ is equivalent met het stelsel

$$(7.5a) \quad P(f(x, \lambda)) = 0,$$

$$(7.5b) \quad (I - P)(f(x, \lambda)) = 0.$$

Zij nu $x = x_0 + \delta x_1 + \delta x_2$, $\delta x_1 = p(x - x_0)$, $\delta x_2 = (I - P)(x - x_0)$ en $\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda$.
Dan geldt de volgende

STELLING 7.2. *Er zijn positieve getallen ε en δ , zodanig dat de vergelijking in δx_2*

$$(I - P)f(x_0 + \delta x_1 + \delta x_2, \lambda_0 + \delta \lambda) = 0$$

een unieke oplossing $\delta x_2(\delta x_1, \delta \lambda)$ heeft in de bol $B(0, \varepsilon)$ voor $\|\delta x_1\| < \delta$ en $|\delta \lambda| < \delta$. Bovendien is de functie

$$\delta x_2: B(0, \delta)(\subset \mathbb{R}^{k_0}) \times [-\delta, \delta] \rightarrow B(0, \varepsilon)(\subset \mathbb{R}^{k-k_0})$$

"vele" malen continu-differentieerbaar in beide argumenten. Het stelsel vergelijkingen (7.5) is equivalent met

$$(7.6) \quad Pf(x_0 + \delta x_1 + \delta x_2(\delta x_1, \delta \lambda), \lambda_0 + \delta \lambda) = 0$$

en

$$x = x_0 + \delta x_1 + \delta x_2(\delta x_1, \delta \lambda).$$

BEWIJS. Uit $(I - P)f(x_0 + \delta x_1 + \delta x_2, \lambda_0 + \delta \lambda) = 0$ volgt

$$(I - P)\{f_x \delta x_2 + f_\lambda \delta \lambda + R(\delta x_1 + \delta x_2, \delta \lambda)\} = 0,$$

zodat

$$(7.7) \quad \delta x_2 = J_1^{-1}\{-(f_\lambda \delta \lambda + R(\delta x_1 + \delta x_2, \delta \lambda))\}.$$

Verder met behulp van de contractiestelling van Banach. $\square$

Hiermee is het stelsel (7.5) $(k \times k)$ gereduceerd tot het stelsel (7.6) $(k_0 \times k_0)$. Verder kan uit (7.7) veelal een goede benadering van $\delta x_2(\delta x_1, \delta \lambda)$ geconstrueerd worden voor δx_1 en $\delta \lambda$ klein.

Nu zullen we het geval $k_0 = 1$ nader bezien ($k_0 > 1$ veel en veel moeilijker!). In dit geval is (7.6) een scalaire vergelijking. We gebruiken de Taylor ontwikkeling in $\delta\lambda$ en δx_1 van het linkerlid van (7.6) om een aantal mogelijke gevallen te signaleren:

$$\begin{aligned} \underline{A.} \quad Pf(\dots, \dots) &= B\delta\lambda + C\delta x_1^2 + D\delta x_1\delta\lambda + E\delta\lambda^2 + R_B(\delta x, \delta\lambda) = \\ &= B\delta\lambda(1 + (E - \frac{D^2}{4C})\delta\lambda) + C(\delta x_1 + \frac{D}{2C}\delta\lambda)^2 + R_B(\delta x, \delta\lambda), \\ &\quad \text{met } R_B = O(|\delta x|^3 + |\delta\lambda|^3). \end{aligned}$$

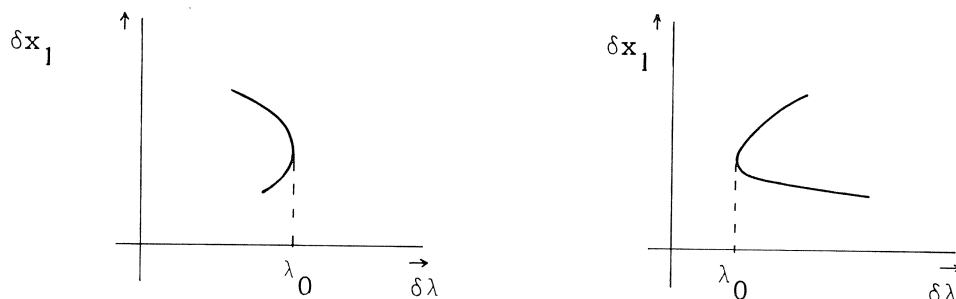
Dan

$$\delta x_1(\delta\lambda) = \frac{-D}{2C} \delta\lambda \pm \sqrt{-\frac{B}{C} \delta\lambda(1 + (E - \frac{D^2}{4C})\delta\lambda)} + O(\delta\lambda^2)$$

en

$$x(\lambda) = x_0 + \delta x_1(\lambda - \lambda_0) + \delta x_2(\delta x_1(\lambda - \lambda_0), \lambda - \lambda_0).$$

Afhankelijk van het teken van $-B/C$ slechts oplossing (voor $\delta\lambda$ klein) voor $\delta\lambda < 0$ respectievelijk $\delta\lambda > 0$.



Figuur 7.2.

B. Veronderstel dat er een schaar oplossingen $x_0(\lambda)$,

$$(7.8) \quad f(x_0(\lambda), \lambda) = 0, \quad \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta,$$

bekend is. Pas nu de coördinatentransformatie

$$(7.9) \quad (x, \lambda) = (\tilde{x} + x_0(\lambda), \lambda)$$

toe. De vergelijking $f(x, \lambda) = 0$ gaat dan over in

$$(7.10) \quad \tilde{f}(\tilde{x}, \lambda) = 0,$$

met de eigenschap

$$\tilde{f}(0, \lambda) = 0$$

en dus ook

$$(7.11) \quad \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \tilde{f}(0, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta).$$

Hieronder laten we de slangetjes verder achterwege. Uit (7.7) en (7.11) is eenvoudig af te leiden

$$(7.12) \quad \delta x_2 = O(\delta x_1^2 + \delta \lambda^2).$$

Met de gegevens uit (7.11) en (7.12) bezien we de vergelijking (7.6) nog eens: (Taylorontwikkeling)

$$\begin{aligned} Pf = P(f(0, \lambda_0) + f_x(0, \lambda_0)\delta x + f_\lambda(0, \lambda_0)\delta \lambda + \frac{1}{2}f_{\lambda\lambda}(0, \lambda_0)\delta \lambda^2 + \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(0, \lambda_0)\delta x^2 + f_{x\lambda}(0, \lambda_0)\delta x \delta \lambda + R(\delta x, \delta \lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Hiervan zijn de eerste vier termen identiek nul en voor de restterm geldt

$$R(\delta x, \delta \lambda) = O(\|\delta x\|^3 + |\delta \lambda|^3).$$

Nu voeren we in

$$\delta x = \delta x_1 + \delta x_2 = \alpha e_0 + \delta x_2 \quad (e_0 \text{ eigenvector bij eigenwaarde nul}).$$

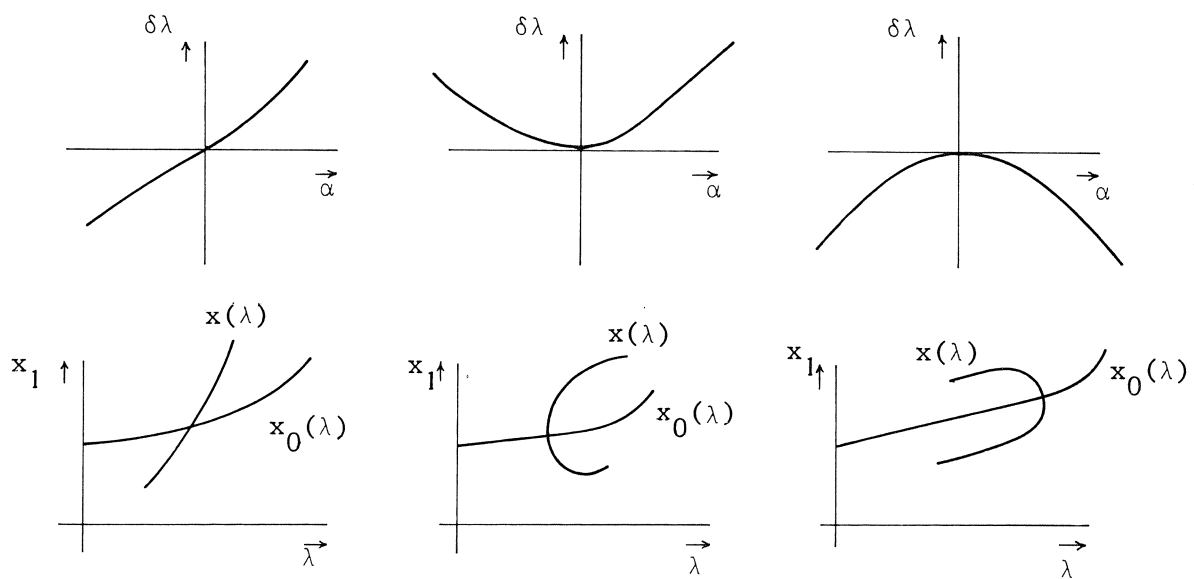
Invullen hiervan in (7.13) levert (na uitdelen van α):

$$P(f_{x\lambda}(0, \lambda_0)e_0 \delta \lambda + \frac{1}{2}f_{xx}\alpha e_0^2 + \tilde{R}(\alpha, \delta \lambda)) = 0,$$

met $\tilde{R}(\alpha, \delta \lambda) = O(|\alpha|^2)$. Hieruit volgt dat onder de conditie

$$\text{Pf}_{x\lambda}(0, \lambda_0)e_0 \neq 0$$

geldt dat $\delta\lambda$ een eenduidige functie van α is. Hieronder zijn de mogelijke situaties geschetst:



Figuur 7.3.

We vinden dus behalve de "triviale" oplossing $x_0(\lambda)$ ook nog de tak

$$x(\lambda) = x_0(\lambda) + \delta x_1(\lambda) + \delta x_2(\delta x_1(\lambda), \lambda)$$

met

$$\delta x_2 = O(\delta x_1^2 + \delta \lambda^2).$$

De stabiliteit van de "geconstrueerde" oplossingen kan op de volgende wijze (met behulp van de graad van de afbeelding $f(\cdot, \lambda)$) geanalyseerd worden:

De eigenwaarden van de Jacobiaan $f_x(x(\lambda), \lambda)$ zijn continue functies van de parameter λ . Hieruit volgt dat indien $f_x(x_0, \lambda_0)$ behalve de eigenwaarde $\mu_0 = 0$ nog een eigenwaarde met positief reëel deel heeft, alle stationaire punten in een voldoende kleine omgeving van (λ_0, x_0) instabiel zijn (volgens de stelling van Poincaré-Liapunov).

Indien behalve $\mu_0 = 0$ alle eigenwaarden van $f_x(x_0, \lambda_0)$ een negatief reëel deel hebben, dan is het stationaire punt $(\lambda, x(\lambda))$ stabiel indien $\mu_0(\lambda) < 0$ en instabiel indien $\mu_0(\lambda) > 0$. Het teken van $\mu_0(\lambda)$ (de grootste eigenwaarde als functie van λ) is dan te bepalen met behulp van de graad indien de hypothese

$$\det(f_x(x(\lambda), \lambda)) \neq 0, \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta),$$

$$\Leftrightarrow \quad u_0(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta),$$

gesteld wordt, hetgeen redelijk is omdat anders de stabiliteitsanalyse met behulp van de stelling van Poincaré-Liapunov zonder meer al onmogelijk is. Via een gelijksoortige analyse van de eigenwaarde-vergelijkingen

$$f_x(x(\lambda), \lambda) e_\mu = \mu e_\mu,$$

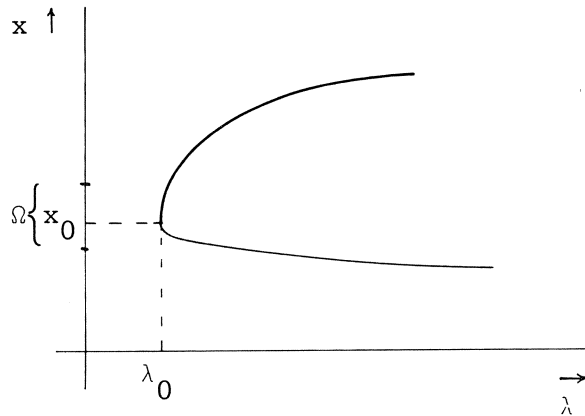
als zojuist gebruikt om niet-triviale oplossingen te construeren, zijn er (weinig restrictieve) natuurlijke voorwaarden voor de functie f te vinden zo dat de hypothese vervuld is.

Het idee is nu om een gebied(je) Ω om x_0 te kiezen en $\text{degr}(0, f(\cdot, \lambda), \Omega)$ te beschouwen. Vanwege de hypothese geldt

$$(7.14) \quad \text{degr}(0, f(\cdot, \lambda), \Omega) = \sum_{x_i(\lambda)} \text{sign}(\det f_x(x_i(\lambda), \lambda)).$$

Anderzijds is voor $\lambda \in [\lambda_0 - \delta_1, \lambda_0 + \delta_1]$ (7.14) constant (wegens de homotopie eigenschap van de graad).

Geval A.



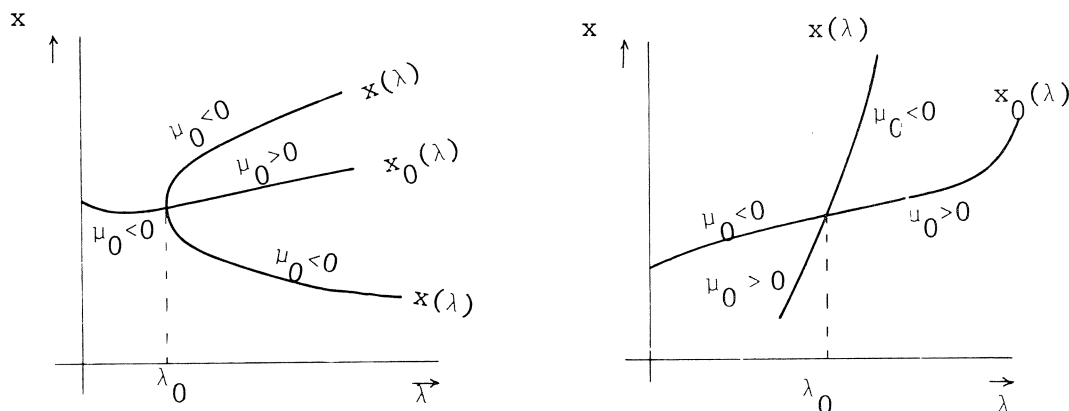
Figuur 7.4.

Stel $\mu_0(\lambda) < 0$ (respectievelijk $\mu_0(\lambda) > 0$) voor bovenste tak $x_1(\lambda)$. Er geldt $\text{degr}(0, f(\cdot, \lambda), \Omega) = 0$, zodat

$$\det f_x(x_1(\lambda), \lambda) = -\det(f_x(x_2(\lambda), \lambda)).$$

Hieruit volgt dat op de onderste tak $\mu_0(\lambda) > 0$ (respectievelijk $\mu_0(\lambda) < 0$). Kort gezegd: één tak is stabiel en de andere is instabiel.

Geval B. Op dezelfde wijze komen we tot de volgende plaatjes:



Figuur 7.5.

8. EEN "LIMIT CYCLE" SPLITST ZICH AF VAN DE "TRIVIALE" STATIONAIRE TOESTAND

Veronderstel dat er een oplossing $x_0(\lambda)$ van $f(x_0(\lambda), \lambda) = 0$ bekend is en dat bovendien geldt dat de Jacobiaan $f_x(x_0(\lambda), \lambda)$ voor $\lambda = \lambda_0$ een paar complex geconjugeerde enkelvoudige eigenwaarden μ_0 en $\mu_1 = \bar{\mu}_0$ heeft met

$$\operatorname{Re} \mu_0 = \operatorname{Re} \mu_1 = 0, \quad \operatorname{Im} \mu_0 = -\operatorname{Im} \mu_1 = \tau.$$

Zonder beperking van de algemeenheid kan verondersteld worden dat geldt

$$x_0(\lambda) = 0, \quad \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta;$$

(indien dit niet het geval is bekijk dan $x = x_0(\lambda) + y$, $G(y, \lambda) = f(x_0(\lambda) + y, \lambda) = 0$ en $\frac{d}{dt} y = G(y, \lambda)$.)

Na basistransformatie (in de $\mathbb{R}^n$) heeft de jacobiaan in $(x_0, \lambda_0) = (0, \lambda_0)$ de gedaante

$$f_x(0, \lambda_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \tau & \emptyset \\ -\tau & 0 & \emptyset \\ \hline \emptyset & & J_1 \end{array} \right).$$

Zij nu op deze basis

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &= (x_1, x_2, 0, \dots, 0) + (0, 0, x_3, \dots, x_n) \\ &= z + v. \end{aligned}$$

Dan is de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt} x = f(x, \lambda) = f_x(0, \lambda_0)x + R(x, \delta\lambda),$$

met $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, $R = O(|x|^2 + |\delta\lambda|^2)$, te herschrijven in het stelsel

$$\frac{d}{dt} z = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} z + R_1(z, v, \delta\lambda), \quad R_1 = O(|z|^2 + |v|^2 + |\delta\lambda|^2),$$

$$\frac{d}{dt} v = J_1 v + R_2(z, v, \delta\lambda), \quad R_2 = O(|z|^2 + |v|^2 + |\delta\lambda|^2).$$

Nu passen we de coördinatentransformatie

$$z_1 = \rho(t) \cos(\theta(t)),$$

$$z_2 = -\rho(t) \sin(\theta(t)),$$

toe, hetgeen resulteert in het stelsel

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d}{dt} \theta &= \tau + T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta\lambda), \\ (8.1) \quad \text{b. } \frac{d}{dt} \rho &= r_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta\lambda), \\ \text{c. } \frac{d}{dt} v &= J_1 v + r_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta\lambda), \end{aligned}$$

met T , r_1 , r_2 van minstens tweede orde in de argumenten! Door (8.1a) op (8.1b) en (8.1c) te delen vinden we

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d}{d\theta} \rho &= \tilde{r}_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta\lambda), \\ (8.2) \quad \text{b. } \frac{d}{d\theta} v &= \frac{1}{\tau} J_1 v + \tilde{r}_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta\lambda), \end{aligned}$$

met al weer $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ tweede (of hogere) orde in de argumenten. Door (8.2) op te lossen en $\rho(\theta)$ en $v(\theta)$ in (8.1a) te substitueren wordt θ als functie van t gevonden en zo de oplossing van (8.1) gevonden.

OPMERKING. $\tilde{r}_1$ en $\tilde{r}_2$ zijn direkt (weliswaar door middel van veel rekenwerk) in f uit te drukken.

De rechterleden van (8.2) zijn 2π -periodiek in θ ; dit suggereert ons om te onderzoeken of (8.2) 2π -periodieke oplossingen heeft. Indien deze bestaan corresponderen ze met $t_{2\pi}$ -periodieke oplossingen van (8.1) ($\theta(t_{2\pi}) = 2\pi$).

Een zeer bruikbare methode om vergelijkingen van het type (8.2) te onderzoeken kan men vinden in hoofdstuk VIII van [7]. Schetsmatig weergegeven gaat de methode als volgt te werk:

a. de (scalaire) differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt} z = f(t),$$

met $f(t)$ 2π -periodiek, heeft de 2π -periodieke oplossing

$$z(t) = z_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

met z_0 vrij te kiezen, dan en slechts dan alleen als

$$[f] = \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau = 0.$$

Zij $Qf(t) = f(t) - [f]$, dan heeft $\frac{d}{dz} z = Qf$ als 2π -periodieke oplossing

$$z(t) = z_0 + \int_0^t Qf(\tau) d\tau.$$

b. De differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt} w = \frac{1}{\tau} J_1 w + g(t),$$

met $g(t)$ 2π -periodiek heeft, voor het geval dat alle eigenwaarden van J_1 een reëel deel ongelijk aan nul hebben, een unieke 2π -periodieke oplossing $w(t)$.

c. Door a en b te combineren is (via Picard-iteratie, bijvoorbeeld) in te zien dat

$$\frac{d}{d\theta} \rho = Q(\tilde{r}_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta \lambda)),$$

$$\frac{d}{d\theta} v = \frac{1}{\tau} J_1 v + \tilde{r}_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, v, \delta \lambda),$$

bij elke waarde van $\rho_0 = [\rho]$ (ρ_0 voldoende klein) een unieke 2π -periodieke oplossing

$$\rho(\rho_0, \delta\lambda, \theta), \quad v(\rho_0, \delta\lambda, \theta)$$

heeft met de eigenschap

$$|\rho - \rho_0| = O(\rho_0^2 + \delta\lambda^2),$$

$$|v| = O(\rho_0^2 + \delta\lambda^2).$$

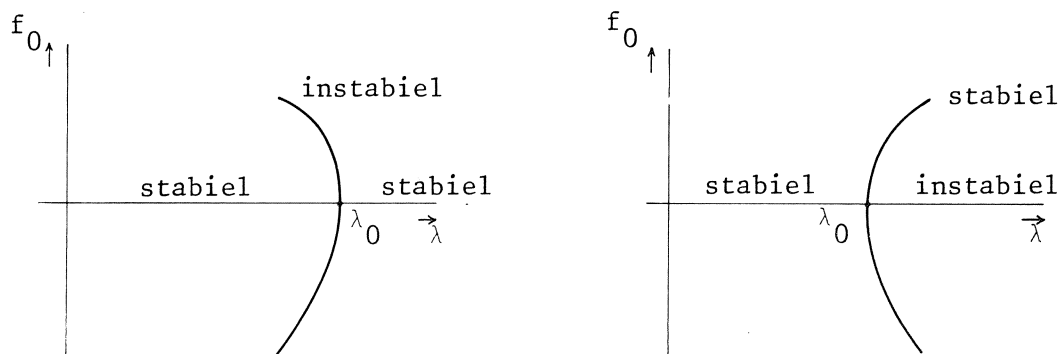
d. De onder c gevonden (ρ, v) is oplossing van (8.2) dan en slechts dan als

$$F(\rho_0, \delta\lambda) = [\tilde{r}_1(\rho(\rho_0, \delta\lambda, \theta)\cos\theta, \rho(\rho_0, \delta\lambda, \theta)\sin\theta, v(\rho_0, \delta\lambda, \theta), \delta\lambda] = 0.$$

Dit laatste nu kan weer als een bifurcatie-vergelijking opgevat worden (het is een scalaire vergelijking). Gewoonlijk is F van de vorm

$$F(\theta_0, \delta\lambda) = A\rho_0\delta\lambda + B\rho_0^3 + \dots$$

De oplossingsstructuur is dan als in figuur 8.1.



Figuur 8.1.

Het blijkt dus dat, indien bij variatie van λ twee complex geconjugeerde eigenwaarden van de jacobiaan $f_x(x_0(\lambda), \lambda)$ de imaginaire as passeren, er gewoonlijk een periodieke oplossing zich afsplitst van het stationaire

punt $x(\lambda)$.

Wat de stabiliteit betreft geldt (net als in het geval dat zich een ander stationair punt $x_1(\lambda)$ afsplitst van $x_0(\lambda)$) dat, indien voor $\lambda > \lambda_0$ (respektievelijk $\lambda < \lambda_0$) $x_0(\lambda)$ stabiel is en voor $\lambda < \lambda_0$ (respektievelijk $\lambda > \lambda_0$) $x_0(\lambda)$ instabiel is, dan is de periodieke oplossing voor $\lambda > \lambda_0$ (respektievelijk $\lambda < \lambda_0$) instabiel en voor $\lambda < \lambda_0$ (respektievelijk $\lambda > \lambda_0$) stabiel. Het bewijs hiervan maakt gebruik van de Floquet theorie en is nogal technisch.

9. EEN VOORBEELD IN VERBAND MET MOLECULAIRE GEWICHTSVERDELINGEN

Het systeem

- 1) $\frac{d}{dt} \lambda_0 = -\mu_x \mu_y + \frac{1}{\tau}(1-\lambda_0),$
- 2) $\frac{d}{dt} \mu_x = -\mu_x \mu_y + \frac{1}{\tau}(1-\mu_x),$
- 3) $\frac{d}{dt} \mu_y = -\mu_x \mu_y + \frac{1}{\tau}(1-\mu_y),$
- 4) $\frac{d}{dt} \lambda_1 = \frac{1}{\tau}(1-\lambda_1),$
- 5) $\frac{d}{dt} x_1 = 2x_2 x_3 - \frac{1}{\tau} x_1,$
- 6) $\frac{d}{dt} x_2 = x_2 x_5 + x_3 x_4 - \mu_y x_2 + \frac{1}{\tau}(1-x_2),$
- 7) $\frac{d}{dt} x_3 = x_2 x_6 + x_3 x_5 - \mu_x x_3 + \frac{1}{\tau}(1-x_3),$
- 8) $\frac{d}{dt} x_4 = 2x_4 x_5 - 2\mu_4 x_4 - \frac{1}{\tau} x_4,$
- 9) $\frac{d}{dt} x_5 = x_4 x_6 + x_5^2 - (\mu_x + \mu_y) x_5 + \frac{1}{\tau}(1-x_5),$
- 10) $\frac{d}{dt} x_6 = 2x_6 x_5 - 2\mu_x x_6 - \frac{1}{\tau} x_6,$

afkomstig van polymerisatiereacties (zie [8], pagina 11), zal hier bekeken worden.

A. In de eerste plaats valt op te merken dat de vergelijkingen 1, 2, 3 en 4 onafhankelijk zijn van de rest; nu zullen wij deze dan ook apart bekijken. Herordenen levert:

- 1') $\frac{d}{dt} \lambda_1 = \frac{1}{\tau}(1-\lambda_1),$
- 2') $\frac{d}{dt}(\mu_x - \mu_y) = -\frac{1}{\tau}(\mu_x - \mu_y),$

$$3') \frac{d}{dt}(\mu_x + \mu_y) = \frac{1}{2}(\mu_x - \mu_y)^2 - \frac{1}{2}(\mu_x + \mu_y)^2 + \frac{1}{\tau}(2 - (\mu_x + \mu_y)),$$

$$4') \frac{d}{dt} \lambda_0 = \frac{1}{4}(\mu_x - \mu_y)^2 - \frac{1}{4}(\mu_x + \mu_y)^2 + \frac{1}{\tau}(1 - \lambda_0).$$

De stationaire toestanden voldoen aan $\frac{d}{dt} \dots = 0$ en worden dus bepaald door de vier bovenstaande vergelijkingen, met voor het linkerlid nul gesubstitueerd. Dan volgt:

$$\text{uit 1')} \quad \lambda_1 = 1,$$

$$\text{uit 2')} \quad \mu_x - \mu_y = 0, \quad \text{zeg } \mu = \mu_x = \mu_y,$$

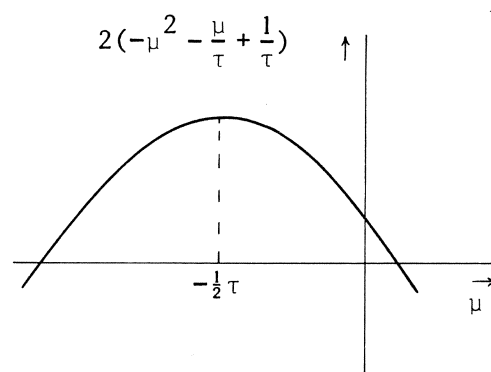
$$\text{uit 3')} \quad 2[-\mu^2 - \frac{1}{\tau}\mu + \frac{1}{\tau}] = 0, \quad \text{zodat } \mu = \mu^+ \text{ of } \mu = \mu^- \text{ met}$$

$$\mu^{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{\tau}},$$

$$\text{uit 4')} \quad \lambda_0 = \mu.$$

Omdat $\mu^- < 0$, heeft $\mu = \mu^-$ geen fysische betekenis, zodat $\mu = \mu^+$. Er bestaat dus precies één (fysisch) stationair punt.

Onmiddellijk duidelijk is, dat de jacobiaan van het rechterlid de beneden-diagonaal vorm heeft, hetgeen impliceert dat de eigenwaarden overeenkomen met de diagonaalelementen van de jacobiaan. Aangezien alle diagonaalelementen negatief zijn, mogen we met behulp van de stelling van Poincaré-Liapunov concluderen, dat het stationaire punt stabiel is.



Figuur 9.1.

B. De vergelijkingen 8, 9 en 10 zijn alleen afhankelijk van de vergelijkingen 1, 2, 3 en 4, die al geanalyseerd zijn:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu = \mu_x = \mu_y = -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \frac{1}{\tau}}, \quad \lambda_0 = \mu,$$

in het stationaire punt. Enige manipulaties leveren op:

$$\begin{aligned}
5') \quad \frac{d}{dt}(x_4 x_6) &= 2(x_4 x_6)(2x_5 - 2\mu - \frac{1}{\tau}), \\
6') \quad \frac{d}{dt} x_5 &= (x_4 x_6) + x_5^2 - 2\mu x_5 + \frac{1}{\tau}(1-x_5), \\
7') \quad \frac{d}{dt} x_6 &= x_6(2x_5 - 2\mu - \frac{1}{\tau}).
\end{aligned}$$

De vergelijkingen 5' en 6' zijn weer onafhankelijk van 7'; we bekijken ze dan ook eerst. Voor het stationaire punt geldt:

$$\begin{aligned}
\text{of } x_4 x_6 &= 0 \quad \text{en } x_5 = x_5^+ \text{ of } x_5^- \text{ met } x_5^\pm = \mu + \frac{1}{2\tau} \sqrt{(\mu + \frac{1}{2\tau})^2 - \frac{1}{\tau}}, \\
\text{of } x_5 &= \mu + \frac{1}{2\tau} \quad \text{en } x_4 x_6 = -\frac{1}{\tau} + (\mu + \frac{1}{2\tau})^2.
\end{aligned}$$

De jacobiaan van dit 2×2 stelsel is

$$j = \begin{pmatrix} 2(2x_5 - 2\mu - \frac{1}{\tau}) & 4x_4 x_6 \\ 1 & 2x_5 - 2\mu - \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Met behulp van de stelling van Poincaré-Liapunov vinden wij

- i) het punt $x_4 x_6 = 0$, x_5^- is stabiel (beide eigenwaarden kleiner dan nul),
- ii) het punt $x_4 x_6 = 0$, x_5^+ is instabiel (beide eigenwaarden groter dan nul),
- iii) het punt $x_4 x_6 = -\frac{1}{\tau} + (\mu + \frac{1}{2\tau})^2 = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{4\tau^2} + \frac{1}{\tau}$, $x_5 = \mu + \frac{1}{2\tau}$ is instabiel, aangezien voor de eigenwaarden van de jacobiaan geldt $\lambda^2 = 4x_4 x_6 = \frac{1}{4\tau^2}$, zodat $\lambda = \lambda^\pm = \pm \frac{1}{2\tau}$ met λ^+ positief.

Het enige fysische stationaire punt is dus

$$x_5^- = \mu + \frac{1}{2\tau} - \sqrt{(\mu + \frac{1}{2\tau})^2 - \frac{1}{\tau}}, \quad x_4 x_6 = 0.$$

Uit vergelijking 8 volgt dan $x_4 = 0$, terwijl uit vergelijking 7' volgt $x_6 = 0$.

De jacobiaan van het 3×3 stelsel (x_4, x_5, x_6) heeft in het stationaire punt $x_4 = 0$, $x_5 = x_5^-$, $x_6 = 0$ de gedaante

$$j_B = \begin{pmatrix} 2(2x_5^- - 2\mu - \frac{1}{\tau}) & 0 & 0 \\ 1 & 2x_5^- - 2\mu - \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 2x_5^- - 2\mu - \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Onmiddellijk volgt nu dat dit stationaire punt stabiel is (alle eigenwaar-

den zijn negatief).

C. Substitutie van de gevonden waarden van x_5 , x_4 , μ_y , μ_x , x_6 (in het stationaire punt) in de vergelijkingen voor x_1 , x_2 en x_3 levert:

$$8') \frac{d}{dt} x_2 = (x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau})x_2 + \frac{1}{\tau},$$

$$9') \frac{d}{dt} x_3 = (x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau})x_3 + \frac{1}{\tau},$$

$$10') \frac{d}{dt} x_1 = 2x_2x_3 - \frac{1}{\tau}x_1.$$

In het stationaire punt geldt

$$x_2 = -\frac{1}{\tau} / (x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau}),$$

$$x_3 = -\frac{1}{\tau} / (x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau}),$$

$$x_1 = \frac{2}{\tau} / (x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau})^2$$

De jacobiaan van dit laatste stelsel heeft de gedaante

$$j_C = \begin{pmatrix} x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau} & 0 \\ 2x_3 & 2x_2 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Alle eigenwaarden van j_C zijn negatief ($x_5^- - \mu - \frac{1}{\tau} = \mu + \frac{1}{2\tau} - \sqrt{(\mu + \frac{1}{2\tau})^2 - \frac{1}{\tau}} - \mu - \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{2\tau} - \sqrt{(\mu + \frac{1}{2\tau})^2 - \frac{1}{\tau}} < 0$); dan is het stationaire punt stabiel.

Dat het gevonden stationaire punt het enige stabiele is van het totale stelsel is in te zien door de jacobiaan van het hele stelsel te bezien:

$$j = \begin{pmatrix} j_A & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & j_B & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & j_C \end{pmatrix}$$

Alle eigenwaarden van j zijn negatief dan en slechts dan als alle eigenwaarden van j_A , van j_B en van j_C negatief zijn.

Het voorbeeld is dus met elementaire methoden volledig te analyseren. Niettemin zullen we een schets geven van een toepassing van de graad van

afbeeldingen op dit stelsel vergelijkingen.

Uit de voorgaande analyse blijkt vrij snel dat het rechterlid $f(y)$ van het stelsel vergelijkingen 1) ... 10), $y_1 = x_0, \dots, y_{10} = x_6$ voldoet aan

$$(f(y), n_1) < 0$$

voor

$y \in \partial\Omega$, n_y de naar buiten gerichte normaal op de rand,

$$\Omega = \{-\varepsilon_i < y_i < \eta_i\}, \quad \varepsilon_i, \eta_i > 0,$$

bij geschikte keuze van ε_i en η_i . Hieruit volgt met behulp van de homotopie eigenschap van de graad

$$\begin{aligned} \text{degr}(0, f, \Omega) &= \text{degr}(0, \mu f + (1-\mu)(-x+x_0), \Omega), \quad x_0 \in \Omega \\ &= (-1)^{10} = 1. \end{aligned}$$

Aan de andere kant is eenvoudig aan te tonen, dat voor η_i, ε_i geschikt gekozen geldt, dat alle eigenwaarden van de jacobiaan $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ negatief zijn in Ω . Dus alle nulpunten van f in Ω zijn niet gedegeneerd en hun bijdrage tot de graad is $+1$. Dit impliceert dat f precies één nulpunt in Ω heeft en dat dit nulpunt een stabiel stationair punt is volgt onmiddellijk uit de stelling van Poincaré-Liapunov.

10. LITERATUUR

- [1] GAVALAS, G.R., *Nonlinear differential equations of chemically reacting systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [2] SATTINGER, D.H., *Topics in stability and bifurcation theory*, Lecture Notes in Math., Vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [3] PIMBLEY, G.H. Jr., *Eigenfunction branches of nonlinear operators, and their bifurcations*, Lecture Notes in Math., Vol. 104, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

- [4] RABINOWITZ, P.H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Anal. 7(1971) 487-513.
- [5] SCHWARTZ, J.T., *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [6] ALEXANDROFF, P., *Combinatorial Topology*, Graylock Press, Rochester, 1960.
- [7] HALE, J.K., *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [8] ROOS, J.P. & C. SCHWEIGMAN, Akzo Research Report CRW D73/123, 1973.
- [9] STAKGOLD, I., *Branching of solutions of nonlinear equations*, SIAM Review 13(1971) 289-332.
- [10] TEMME, N.M., (ed.), *Colloquium Niet-lineaire Analyse*, MC Syllabus 26.

ONTVANGEN 12 NOV. 1975